Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

**Отчёт по лабораторной работе № 1**

Тема: Расписание

Дисциплина: Системный анализ и принятие решений.

Выполнил студент гр. 5130901/10101 М.Т. Непомнящий

(подпись)

Руководитель А.Г. Сиднев

(подпись)

Санкт-Петербург

2024

**Оглавление**

[1. Условие 3](#_Toc159806114)

[1.1. Условие варианта: 3](#_Toc159806115)

[1.2. Задание: 3](#_Toc159806116)

[2. Ход решения 5](#_Toc159806117)

[2.1. Определение наиболее ранних моментов методом математического программирования. 5](#_Toc159806118)

[2.2. Определить наибольшие ранние моменты начала работ и их интенсивности 6](#_Toc159806119)

[2.3. Самостоятельно распределить работы м/у заданным числом исполнителей и сформулировать задачу мат. программирования с бинарными индикаторами переменными. Определить число бинарных переменных и доп. ограничений в этой задаче и дать содержательную формулирову части ограничений с бинарными переменными. 9](#_Toc159806120)

[2.3.1. Изменить формулировку задачи так, чтобы число бинарных переменных не превышало 10. Решить полученную задачу с использованием команды intlinprog. Определить мощность множества бинарных переменных задачи и дать содержательную интерпретацию полученному решению. 9](#_Toc159806121)

[2.4. Найти характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе. 13](#_Toc159806122)

[2.5. Найти характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе. 15](#_Toc159806123)

[*2.6.* Определить помимо полных резервов времени работ резервы времени, относящиеся к событиям сетевого графа, а именно *.* 17](#_Toc159806124)

[2.7. Рассмотреть вероятностную постановку задачи анализа расписания. 18](#_Toc159806125)

[2.8. Представить пошаговую процедуру имитационного моделирования расписания по схеме событий с учетом числа исполнителей и решающего правила ранжирования работ из числа возможных. По результатам моделирования построить диаграмму. 19](#_Toc159806126)

[3. Вывод и анализ проделанной работы 25](#_Toc159806127)

[4. Приложения 26](#_Toc159806128)

# Условие

## Условие варианта:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Граф | Число исполнителей[[1]](#footnote-1) | Решающее правило |
| 6 | 6 | 4 | 3 (Работы с минимальным резервом - вперед) |

Согласно варианту, имеем следующий граф:

Изображение выглядит как линия, диаграмма, круг

Автоматически созданное описание

Рис. 1 – Исходный граф

## Задание:

Выполнить следующие разделы:

1. Определить наиболее ранние моменты начала работ с использованием метода математического программирования.
2. Определить наиболее ранние моменты начала работ и их интенсивности, если длительность равна интенсивности выполнения работ, а суммарная интенсивность не превышает 75% от общего числа выполняемых работ.
3. Самостоятельно распределить работы между заданным числом исполнителей и сформулировать задачу математического программирования с бинарными индикаторными переменными. Определить число бинарных переменных и дополнительных ограничений в этой задаче и дать содержательную формулировку части ограничений с бинарными переменными.
   1. Изменить формулировку задачи так, чтобы число бинарных переменных не превышало 10. Решить полученную задачу с использованием команды **intlinprog**. Определить мощность множества бинарных переменных задачи и дать содержательную интерпретацию полученному решению.
4. Найти характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе.
5. Найти те же характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием математического программирования.
6. Определить помимо полных резервов времени работ резервы времени, относящиеся к событиям сетевого графа, а именно *.*
7. Рассмотреть вероятностную постановку задачи анализа расписания.

Считать СКО времен выполнения работ равными 5% от их длительностей. Предполагая неизменным, критический путь (оценить справедливость этого предположения) найти вероятность того, что время выполнения комплекса работ не превысит найденного для детерминированной задачи в п.1 на 10%.

Представить пошаговую процедуру имитационного моделирования расписания по схеме событий с учетом числа исполнителей и решающего правила ранжирования работ из числа возможных. По результатам моделирования построить диаграмму Гантта.

# Ход решения

## Определение наиболее ранних ****моментов методом математического программирования.****

Для графа, представленного на Рис. 1, составим систему неравенств для последующего решения с помощью методов линейного программирования. Обозначим за наиболее ранний момент начала работы , а за – наиболее ранний момент окончания всех работ.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

Задача оптимизации заключается в минимизации следующей функции:

Решим эту задачу с помощью функции Matlab linprog. Для этого преобразуем полученные ранее ограничения в матрицу (строки матрицы – количество неравенств системы, столбцы – используемые аргументы ) и вектор (длительности перехода от вершины к вершине):

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число, Прямоугольник

Автоматически созданное описание

Рис. 2 – Преобразование данных в матричный вид

После того, как составили матрицу, вызовем функцию linprog как показано ниже:

Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, число

Автоматически созданное описание

Рис. 3 – Вызов функции linprog

Полученный результат отображается в окне ans и выглядит следующим образом:

Табл. 1 – Время начала всех работ

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 7 | 7 | 7 | 14 | 11 | 11 | 16 | 16 | 16 | 23 | 23 | 28 |

Теперь мы знаем минимальное время начала каждой работы. Для получения информации о времени выполнения всех работ необходимо к времени начала работы (Табл. 1) прибавить время их время выполнения, т. е. 6 соответственно (Рис. 1).

\*Время начала работы включает в себя времена начала работ  и , поэтому при вычислении итогового времени их прибавлять не нужно.

Итого время выполнения всех работ:

## Определить наибольшие ранние моменты начала работ и их интенсивности

Мы сможем увеличить время выполнения всех работ за счет добавления интенсивностей работ, отличных от 1 – некоторые работы ускорим (интенсивность > 1), а некоторые замедлим (интенсивность < 1), если это потребуется.

Изменим исходную систему неравенств согласно правилу:

где – интенсивность работы.

Задавая эти условия, мы стараемся минимизировать время начала всех работ при интенсивности ≤ 75% от числа выполняемых работ, т. е. 15.

Создадим набор всех «работ» (Рис. 4), т. е. ребер графа и массив троек значений, где закодируем систему неравенств, созданную ранее:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число

Автоматически созданное описание

Рис. 4 – Набор всех работ

Стоит заметить, что появилась работа-фальшивка. Это необходимо, чтоб MATLAB оптимизировал также и путь из 8 в 9 вершину и выводил нам результат этой оптимизации.

Создадим необходимые параметры для fmincon, а также функцию, которая разделит заданные нам тройки в требуемые для fmincon значения и выведем результат выполнения на экран:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание

Рис. 5 – Функция разделение троек значений, а также задание fmincon

В результате компиляции программы получим следующие значения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Моменты начала работ | |  | Интенсивности | |
|  | 0.0000 |  |  | 2.4108 |
|  | 0.0000 |  |  | 0.5705 |
|  | 0.0000 |  |  | 0.3017 |
|  | 2.4888 |  |  | 0.8720 |
|  | 2.9036 |  |  | 1.3710 |
|  | 2.9036 |  |  | 0.4261 |
|  | 10.5164 |  |  | 0.6017 |
|  | 5.8212 |  |  | 1.2126 |
|  | 5.8212 |  |  | 0.3526 |
|  | 9.9445 |  |  | 0.9696 |
|  | 9.9445 |  |  | 0.3427 |
|  | 9.9445 |  |  | 0.2654 |
|  | 17.1642 |  |  | 0.6785 |
|  | 17.1642 |  |  | 0.3655 |
|  | 24.5330 |  |  | 0.5092 |
|  | 36.3162 |  |  |  |

Сумма интенсивностей равна 11.25, что составляет ровно 75% от числа исполняемых работ, как и требовалось в задании. Стоит отметить, что общее время работы возрастало до 48.5 с 43, т. е. на 5.5 секунды (или в 1,13 раза). Это связано с тем, что при уменьшении интенсивности, некоторые работы стали работать дольше.

## Самостоятельно распределить работы м/у заданным числом исполнителей и сформулировать задачу мат. программирования с бинарными индикаторами переменными. Определить число бинарных переменных и доп. ограничений в этой задаче и дать содержательную формулировку части ограничений с бинарными переменными.

Самостоятельно распределим 15 работ, представленных на Рис. 1 по четырём исполнителям следующим образом (каждый исполнитель будет иметь по 3–4 задачи):

Изображение выглядит как линия

Автоматически созданное описание

Рис. 6 – Граф самостоятельного распределения

Таким образом синий цвет – первый исполнитель (3 задачи), жёлтый цвет – второй (4 задачи), красный цвет – третий исполнитель (4 задачи), зелёный цвет – четвёртый исполнитель (4 задачи).

Составим следующую систему для каждой пары работ

, где => тогда число дополнительных ограничений задачи c бинарными переменными будет равно , а число бинарных переменных .

### Изменить формулировку задачи так, чтобы число бинарных переменных не превышало 10. Решить полученную задачу с использованием команды intlinprog. Определить мощность множества бинарных переменных задачи и дать содержательную интерпретацию полученному решению.

Упростим поставленную задачу, пусть только некоторые задачи выполняются определенным исполнителем, а над остальными может работать неограниченное число исполнителей:

Изображение выглядит как линия, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рис. 7 – Граф с задачами, часть которых распределена по исполнителям

Т. о., синий цвет – первый исполнитель (3 задачи), жёлтый цвет – второй (4 задачи), красный цвет – третий исполнитель (4 задачи), зелёный цвет – четвёртый исполнитель (4 задачи). Это дает нам дополнительных бинарных переменных и дополнительных ограничений:

После чего решим задачу Matlab с использованием функции intlinprog. Для начала зададим наш граф, как делали это ранее, также добавим пары для новых ограничений и длины путей на каждой из задач:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число

Автоматически созданное описание

Рис. 8 – Пары для новых ограничений и длины путей на каждой из задач

Далее создадим массив, как в пункте 2.1**Ошибка! Источник ссылки не найден.**, но используя наши объявления:

Изображение выглядит как текст, чек, снимок экрана, Шрифт

Автоматически созданное описание

Рис. 9 – Создание массива, используя объявления

Теперь необходимо создадим уравнения, которые добавились дополнительными ограничениями:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число, Шрифт

Автоматически созданное описание

Рис. 10 – Создание уравнений с ограничениями

Все необходимые переменные были созданы, теперь запустим intlinprog и посмотрим на результат:

Изображение выглядит как текст, чек, Шрифт, белый

Автоматически созданное описание

Рис. 11 – Объявление функции initlingprog

В результате компиляции программы были получены следующие значения:

Табл. 2 – результат компиляции программы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Моменты начала работ | |  | Бинарные переменные | |
|  | 0 |  |  | 0 |
|  | 0 |  |  | 1 |
|  | 7 |  |  | 0 |
|  | 6 |  |  | 1 |
|  | 7 |  |  | 0 |
|  | 13 |  |  | 1 |
|  | 13 |  |  | 0 |
|  | 11 |  |  | 1 |
|  | 11 |  |  |  |
|  | 16 |  |  |  |
|  | 16 |  |  |  |
|  | 21 |  |  |  |
|  | 23 |  |  |  |
|  | 23 |  |  |  |
|  | 28 |  |  |  |
|  | 34 |  |  |  |

Как мы видим по значениям бинарных переменных и времени начала работы наши условия выполняются.

Первый исполнитель выполняет сначала работу 12, а потом 15 (т. к. значение =0, а =7)

Второй исполнитель начинает с работы 23 (т. к. до неё первой доходит очередь), далее решается работа 25.

Третий исполнитель начинает с работы 46, а продолжает работой 67 (аналогичный предыдущей паре работ принцип действия).

Четвёртый исполнитель начинает работу с работы 57, а заканчивает работой 58.

## Найти характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе.

Каждому узлу на графе можно сопоставить два момента: минимальное время, когда событие будет осуществлено и наиболее поздний момент .

Воспользуемся методом динамического программирования и определим наиболее ранние моменты для каждого узла графа, представленного на Рис. 1. Для удобства представим исходный граф ещё раз ниже:

Изображение выглядит как линия, диаграмма, круг

Автоматически созданное описание

Самое ранее время начала выполнения работы – время, когда выполнятся все работы, предшествующие заданной:

Полученные значение совпадают с полученными в предыдущих пунктах, что свидетельствует о корректности проделанной работы.

Теперь используя полученные значения определим наиболее поздние моменты времени :

Воспользуемся формулой определим резервы времени выполнения всех работ:

Работы, у которых резерв равен 0 – критический путь. Их длительность напрямую влияет на продолжительность выполнения всех работ.

Изображение выглядит как линия, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рис. 12 – Граф критического пути

## Найти характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе.

Оптимизационная задача для поиска наиболее ранних моментов может быть сформулирована следующим образом:

Для исходного графа (Рис. 1) получим следующую оптимизационную задачу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Запишем эти выражения в массивы:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число

Автоматически созданное описание

Рис. 13 – Запись выражений в массив троек

Запишем эти выражения в виде, подходящем для linprog и вычислим:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число, Шрифт

Автоматически созданное описание

Рис. 14 – Запись выражений и формирование функции linprog

Полученный результат выглядит следующим образом (Табл. 3):

Табл. 3 – Результат компиляции программы

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 7 | 14 | 11 | 16 | 23 | 28 | 34 |

Заметим, что полученные результаты совпадают с теми, которые были получены ранее другим способом.

Оптимизационная задача для поиска наиболее поздних моментов может быть сформулирована следующим образом (стр. 10):

Для решения поставленной задачи необходимо чуть-чуть изменить вызов функции, объявления условий останется аналогичным:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число, Шрифт

Автоматически созданное описание

Рис. 15 – Изменённый вывод функции

Результатом выполнения будет следующим:

Табл. 4 – Результат компиляции модифицированной программы

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 7 | 19 | 11 | 16 | 23 | 28 | 34 |

Как можно заметить, эти значения идентичны посчитанным ранее (Табл. 3). Очевидно, что значение будет аналогично равно посчитанному ранее.

## Определить помимо полных резервов времени работ резервы времени, относящиеся к событиям сетевого графа, а именно *.*

По формуле определим независимые резервы 1-го порядка

Табл. 5 – Независимый резерв 1-го порядка

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0 | 7 | 14 | 11 | 16 | 23 | 28 | 34 | 0 |
|  | 0 | 7 | 19 | 11 | 16 | 23 | 28 | 34 | 0 |
|  | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

По формуле определим свободные резервы времени:

По формуле определим независимые резервы 2-го порядка:

## Рассмотреть вероятностную постановку задачи анализа расписания.

Пояснение к заданию: Считать СКО времен выполнения работ равными 5% от их длительностей. Предполагая неизменным, критический путь (оценить справедливость этого предположения) найти вероятность того, что время выполнения комплекса работ не превысит найденного для детерминированной задачи в п.1 на 10%.

Оценим справедливость неизменности критического пути. Среднее значение длительности работ в графе равно временных единиц. По условию СКО равно 5%, то есть . Следовательно, значение длительности работы может отклониться более чем на 1 с очень маленькой вероятностью (по правилу трех сигм). Так как минимальные временной резерв у работы, не лежащей на критическом пути равен 1, то вероятность изменения критического пути очень мала.

Изображение выглядит как линия, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рис. 16 – Граф критического пути

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий:

Дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

Для суммы случайных величин длительностей работ имеем:

где – это функция Лапласа (табулированный интеграл вероятности):

По условию время выполнения комплекса работ не должно превышать детерминированное значение на 10%, то есть на .

Результат показывает, что шанс отклониться от математического ожидания времени выполнения более чем на 10% крайне мал.

## Представить пошаговую процедуру имитационного моделирования расписания по схеме событий с учетом числа исполнителей и решающего правила ранжирования работ из числа возможных. По результатам моделирования построить диаграмму.

Правило выбора работ:

* Решающее правило: Работы с минимальным резервом – вперед. Для наглядности график с резервами представлен на Рис. 17 ниже (резервы указаны в квадратах)
* Число исполнителей: 4

Параметры:

* – системное время.
* – ранжированный список возможных работ.
* – список выполняемых на момент времени Т работ: начатых, но не завершенных к этому моменту.
* – список времен освобождения ресурсов на момент времени Т.
* – список выполненных на момент времени T работ.
* – список осуществленных событий.
* – множество дуг-работ, исходящих из осуществленных событий.
* – список работ, выполняемых ресурсом s.
* – список моментов начала работ, выполняемых ресурсом s.
* – список моментов окончания работ, выполняемых ресурсом s.

Изображение выглядит как диаграмма, линия, зарисовка, белый

Автоматически созданное описание

Рис. 17 – Граф со свободными резервами времени

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | Что доступно | Выполняется сейчас | Время на выполнение | Список выполненных | Какие узлы закрыли | Все осущ работы+ доступ | Кто и что делает |  |  |
| 0 | 12, 13, 15 |  |  |  | 1 | 12, 13, 15 |  |  |  |
| 0 |  | 12  13  15 | 7  6  3 |  | 1 | 12, 13, 15 | 1: 12  2: 13  3: 15  4: | 0  0  0 | 7  6  3 |
| 3 |  | 12  13 | 7  6 |  | 1 | 12, 13, 15 | 1: 12  2: 13  3:  4: | 0  0 | 7  6 |
| 6 |  | 12 | 7 | 15, 13 | 1 | 12, 13, 15 | 1: 12  2:  3:  4: | 0 | 7 |
| 7 | 23, 24, 25 |  |  | 15, 13, 12 | 1, 2 | 12, 13, 15 |  |  |  |
| 7 |  | 24  23  25 | 4  7  3 | 15, 13, 12 | 1, 2 | 12, 13, 15, 23, 24, 25 | 1: 24  2: 23  3: 25  4: ∅ | 7  7  7 | 11  14  10 |
| 10 |  | 24  23 | 4  7 | 15, 13, 12, 25 | 1, 2 | 12, 13, 15, 23, 24, 25 | 1: 24  2: 23  3:  4: | 7  7 | 11  14 |
| 11 | 45, 46 | 23 | 7 | 15, 13, 12, 25, 24 | 1, 2, 4 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46 | 1:  2: 23  3:  4: ∅ | 7 | 14 |
| 11 |  | 45  23  46 | 5  7  4 | 15, 13, 12, 25, 24 | 1, 2, 4 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46 | 1:  2:  3:  4: |  |  |
| 14 | 36 | 45  46 | 5  4 | 15, 13, 12, 25, 24, 23 | 1, 2, 3, 4 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36 | 1:  2: ∅  3:  4: ∅ |  |  |
| 14 |  | 45  36  46 | 5  4  4 | 15, 13, 12, 25, 24, 23 | 1, 2, 3, 4 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36 | 1:  2: 36  3:  4: |  |  |
| 15 |  | 45  36 | 5  4 | 15, 13, 12, 25, 24, 23, 46 | 1, 2, 3, 4 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36 | 1:  2:  3:  4: |  |  |
| 16 | 56, 57, 58 | 36 | 4 | 15, 13, 12, 25, 24, 23, 46, 45 | 1, 2, 3, 4, 5 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58 | 1:  2: 36  3:  4: |  |  |
| 16 |  | 56  36  57  58 | 7  4  5  7 | 15, 13, 12, 25, 24, 23, 46, 45 | 1, 2, 3, 4, 5 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58 | 1: 56  2: 36  3: 57  4: 58 | 16  16 |  |
| 18 |  | 56  57  58 | 7  5  7 | 15, 13, 12, 25, 24, 23, 46, 45, 36 | 1,2, 3, 4, 5 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58 | 1:  2:  3:  4: |  |  |
| 21 |  | 56  58 | 7  7 | 15, 13, 12, 25, 24, 23, 46, 45, 36, 57 | 1, 2, 3, 4, 5 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58 | 1:  2:  3:  4: |  |  |
| 23 | 67, 68 |  |  | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67, 68 |  |  |  |
| 23 |  | 67  68 | 5  7 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67, 68 | 1: 67  2:  3:  4: |  |  |
| 28 | 78 | 68 | 7 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67, 68, 78 | 1:  2:  3:  4: |  |  |
| 28 |  | 78  68 | 6  7 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67, 68, 78 | 1:  2:  3:  4: |  |  |
| 30 |  | 78 | 6 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67, 68 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67, 68, 78 | 1:  2:  3:  4: |  |  |
| 36 |  |  |  | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67, 68, 78 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 12, 13, 15, 23, 24, 25, 45, 46, 36, 56, 57, 58, 67, 68, 78 |  |  |  |
| I(36) = I – конец работы | | | | | | | | | |

Исходя из результатов, полученных в таблице выше, составим диаграмму Ганта. Для удобства в ячейку, занятую работой, будем вписывать данные в формате: , где – исходная вершина графа, – конечная точка, а – свободные резервы времени (отметим их, чтобы наглядно увидеть что выполняется Решающее правило: Работы с минимальным резервом – вперед). Например, запись означает, что на промежутке времени, выделенном цветом, совершается работа 12 с резервом времени = 0.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Исполнители | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 1 | 12 [0] | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Конец работы |
| 2 | 13 [8] | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 15 [13] | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  | 24 [0] | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  | 23 [4] | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  | 25 [6] | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 45 [0] | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 46 [8] | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 36 [5] | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 56 [0] | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 57 [7] | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 58 [25] | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 67 [0] | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 68 [4] | | | | | | |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 78 [0] | | | | | |

# Вывод и анализ проделанной работы

Лабораторная работа предоставила широкий взгляд на применение методов математического и динамического программирования в управлении проектами. Анализируя результаты, можно выделить эффективность метода математического программирования для определения ранних моментов начала работ и интенсивностей. Этот подход обеспечивает балансировку рабочих нагрузок и более точное планирование.

Разработанная математическая модель с бинарными переменными для распределения работ между исполнителями предоставляет оптимальные решения, учитывая ограничение на число бинарных переменных. Это важно для эффективного использования ресурсов.

Исследование времен выполнения работ через методы динамического и математического программирования выделяет критические пути и резервы времени. Это существенно для управления временными рамками проекта.

Вероятностная постановка задачи анализа расписания с учетом стандартного отклонения времен выполнения работ предоставляет реалистичные сценарии завершения проекта. Имитационное моделирование с числом исполнителей и решающим правилом ранжирования работ предоставляет ценные предсказания, визуализируемые через диаграмму Гантта.

Эти результаты предоставляют комплексный инструментарий для эффективного управления проектами, оптимизации ресурсов и минимизации рисков, что делает этот подход актуальным и полезным в реальных условиях управления проектами.

# Приложения

1. Листинг программного кода, вспомогательные файлы // GitHub URL: <https://github.com/MatNepo/SystemAnalysis/tree/main/Lab1%20-%20%D0%A0%D0%B0%D1%81%D0%BF%D0%B8%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5> (дата обращения: 26.02.2024)

1. Число исполнителей – определяет число одновременно исполняемых заданий при имитационном моделировании расписания. [↑](#footnote-ref-1)